## 1 | Seitenlage

Diagonalisieren Sie die folgende Matrix über $\mathbb{R}$:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen zunächst die EW wie in Rezept 9.17 aus der Linearen Algebra I:

$$\chi_A = \det\begin{pmatrix} 3-X & 2 \\ 0 & 1-X \end{pmatrix} = (3-X)^1(1-X)^1 \qquad 1$$

hat Nullstellen $a_1 = 3$ und $a_2 = 1$. 1

Also hat $A$ EW $a_1 = 3$ und $a_2 = 1$. 0,5

Nun zeigen wir, dass $A$ diagonalisierbar ist zu

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Option A: 2,5**

$$1 \leq \begin{array}{c}\text{geometrische} \\ \text{Vielfachheit} \\ \text{von } a_1\end{array} \leq \begin{array}{c}\text{algebaische} \\ \text{Vielfachheit} \\ \text{von } a_1\end{array} = 1$$

(Satz 9.22)

$$1 \leq \begin{array}{c}\text{geometrische} \\ \text{Vielfachheit} \\ \text{von } a_2\end{array} \leq \begin{array}{c}\text{algebaische} \\ \text{Vielfachheit} \\ \text{von } a_2\end{array} = 1$$

(Satz 9.22)

Also gilt für beide EW:

$$\begin{array}{c}\text{geometrische} \\ \text{Vielfachheit} \\ \text{von } a_i\end{array} = \begin{array}{c}\text{algebaische} \\ \text{Vielfachheit} \\ \text{von } a_i\end{array}$$

Also ist $A$ diagonalisierbar nach Satz 9.23

9.23 Algebraisches / Starkes Diagonalisierbarkeitskriterium

$V$ endlich-dim. VR, $V \xrightarrow{f} V$ Endom.

$f$ ist diagonalisierbar

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \chi_f \text{ zerfällt in Linearfaktoren} \\ \text{(d.h. } \chi_f = (X-a_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (X-a_\ell)^{n_\ell} \cdot q \text{ für ein } q \in K^\times\text{)} \\ \text{und für jeden EW } a \text{ von } f \text{ gilt:} \\ \begin{array}{c}\text{geometrische} \\ \text{Vielfachheit} \\ \text{von } a\end{array} = \begin{array}{c}\text{algebraische} \\ \text{Vielfachheit} \\ \text{von } a\end{array} \end{cases}$$

**Option B:** Bestimme explizit Basis aus EV, wie in Rezept 9.17.

(2,5)

$$\mathrm{Eig}(A;\overset{a_1}{3}) = \ker\begin{pmatrix}0&2\\0&-1\end{pmatrix} \left(= \mathcal{L}\begin{pmatrix}0&2\\0&-1\end{pmatrix}\right) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$ (1 Punkt)

$$\mathrm{Eig}(A;\overset{a_2}{1}) = \ker\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix} \left(= \mathcal{L}\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix}\right) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$ (1 Punkt)

Insbesondere:

$\dim \mathrm{Eig}(A;3) = \dim \mathrm{Eig}(A;1) = 1$, und somit

$\dim \mathrm{Eig}(A;3) + \dim \mathrm{Eig}(A;1) = \dim(\mathbb{R}^2)$

Also folgt Diagonalisierbarkeit aus Satz 9.10.

> 9.10 Geometrisches Diagonalisierbarkeitskriterium
>
> Seien $a_1, \dots, a_\ell$ die verschiedenen EW von $f: V \to V$, $V$ endlich-dim. Dann gilt:
>
> (a) $f$ diagonalisierbar
>
> $\Updownarrow$
>
> (b) $\bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathrm{Eig}(f, a_i) = V$ („$V$ zerfällt in die Eigenräume")
>
> $\Updownarrow$
>
> (c) $\sum_{i=1}^{\ell} \dim \mathrm{Eig}(f, a_i) = \dim V$

**Option C:** Berechne wie in Option B EV $b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, und führe dann expliziten Basiswechsel durch:

(2,5)

$B := (b_1, b_2)$

$E = (e_1, e_2)$ (Standardbasis)

$${}_E M_E(f_A) = A$$

$$\begin{aligned}
{}_B M_B(f_A) &= {}_B M_E(\mathrm{id}) \cdot {}_E M_E(f_A) \cdot {}_E M_B(\mathrm{id}) \\
&= B^{-1} \cdot A \cdot B \\
&= \begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3&2\\0&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

## 2 | Eigenanteil

Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}_5}(\mathbb{F}_5^3)$ durch Multiplikation mit folgender Matrix gegeben. Welche Eigenwerte hat $f$? Ist $f$ diagonalisierbar?

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_f = \det \begin{pmatrix} 3-X & 2 & 0 \\ 0 & 1-X & 2 \\ 1 & 0 & 1-X \end{pmatrix} &= (3-X)(1-X)^2 + 4 \\ &= (3-X)(1-2X+X^2) + 4 \\ &= 3-6X+3X^2-X+2X^2-X^3+4 \\ &= -X^3+5X^2-7X+7 \\ &= -X^3-2X+2 \end{aligned}$$

1

Koeffizienten in $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

Nullstellen von $\chi_f$:

$$\begin{aligned} &\chi_f(0) = 2 \neq 0 \\ &\chi_f(1) = -1 \neq 0 \\ &\boxed{\chi_f(2) = -10 = 0} \\ &\chi_f(3) = \chi_f(-2) = 14 = 4 \neq 0 \\ &\boxed{\chi_f(4) = \chi_f(-1) = 5 = 0} \end{aligned}$$

0,5

0,5

Also haben wir Nullstellen $a_1 = 2$ und $a_2 = 4$, und $(X-a_1)\cdot(X-a_2) = (X-2)(X-4) = X^2-X+3$ teilt $\chi_f$.

Polynomdivision liefert:

$$\chi_f : (X^2-X+3) = \ldots = -X+4$$

Also:

$$\chi_f = -(X-2)(X-4)^2$$

1

Die EW von $f$ sind also $a_1 = 2$ und $a_2 = 4$.

Wieder gibt es mehrere Optionen, wie bei Aufgabe 1.

**Eine Option:**

$$1 \leq \underset{\text{von } a_1}{\text{geometrische Vielfachheit}} \underset{\text{(Satz 9.22)}}{\leq} \underset{\text{von } a_1}{\text{algebaische Vielfachheit}} = 1$$

$$1 \leq \underset{\text{von } a_2}{\text{geometrische Vielfachheit}} \underset{\text{(Satz 9.22)}}{\leq} \underset{\text{von } a_2}{\text{algebaische Vielfachheit}} = 2$$

0,5

Für $a_2$ müssen wir geometrische Vielfachheit berechnen:

1

$$\begin{aligned}
\text{geometrische Vielfachheit von } a_2 &= \dim \operatorname{Eig}(f; a_2) \\
&= \dim \mathcal{L}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\
&= 3 - \underbrace{\operatorname{rk}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |\cdot 2 \\ |\cdot 3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeilenstufenform mit 2 Pivots

$$= 3 - 2$$

$$= 1$$

Also gilt für $a_2$:

$$\text{geometrische Vielfachheit von } a_2 \neq \text{algebraische Vielfachheit von } a_2$$

0,5

Also ist $f$ nach Satz 9.23 **nicht** diagonalisierbar.

Wie immer gilt:
Für jeden Rechenfehler werden im betroffenen Aufgabenteil 0,5 Punkte abgezogen.